

从容面对“史密斯圆图”，不再懵逼

不管多么经典的射频教程，为什么都做成黑白的呢？让想理解“史密斯原图”的同学一脸懵逼。本文解答史密斯圆图三个问题：1、史密斯圆图是什么？2、为什么有史密斯圆图？3、史密斯圆图干什么？

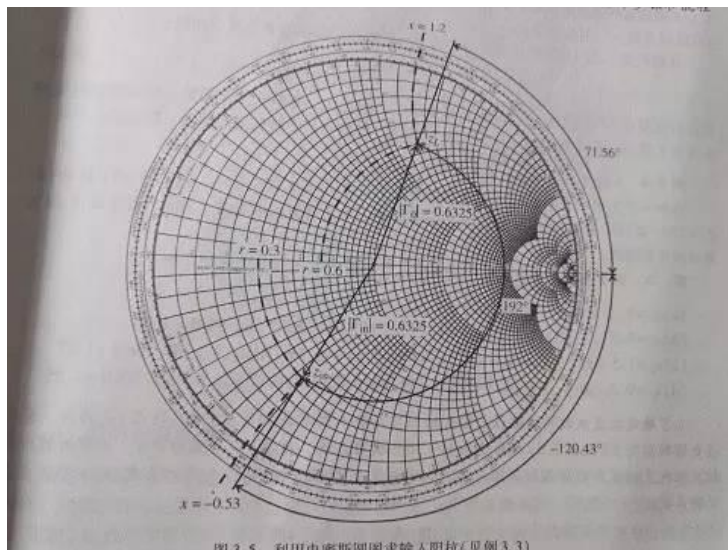


图 3.5 利用史密斯圆图求输入阻抗(见例 3.3)

一、史密斯圆图是什么？

该图表是由菲利普·史密斯(Phillip Smith)于 1939 年发明的，当时他在美国的 RCA 公司工作。史密斯曾说过，“在我能够使用计算尺的时候，我对以图表方式来表达数学上的关联很有兴趣”。

史密斯图表的基本在于以下的算式：

$$\Gamma = \frac{Z_L - 1}{Z_L + 1}$$

当中的 Γ 代表其线路的反射系数(reflection coefficient)。即 S 参数(S-parameter)里的 S_{11} ， Z_L 是归一负载值，即 Z_L / Z_0 。当中， Z_L 是线路本身的负载值， Z_0 是传输线的特征阻抗（本征阻抗）值，通常会使用 50Ω 。

简单的说：就是类似于数学用表一样，通过查找，知道反射系数的数值。

二、为什么有史密斯圆图？

我们现在也不知道，史密斯先生是怎么想到“史密斯圆图”表示方法的灵感，是怎么来的。很多同学看史密斯原图，死记硬背，不得要领，其实没有揣摩，史密斯老先生的创作意图。

凭揣测：是不是受到黎曼几何的启发，把一个平面的坐标系，给“掰弯”了。

我在表述这个“掰弯”的过程，你就理解，这个图的含义了。（坐标系可以掰弯、人尽量不要“弯”；如果已经弯了，本人表示祝福）

现在就“掰弯”给你看。世界地图，其实是一个用平面表示球体的过程，这个过程是一个“掰直”。

史密斯原图，巧妙之处，在于用一个圆形表示一个无穷大的平面。



2.1、首先，我们先理解“无穷大”的平面。

首先我们复习一下理想的电阻、电容、电感的阻抗。

在具有电阻、电感和电容的电路里，对电路中的电流所起的阻碍作用叫做阻抗。阻抗常用 Z 表示，是一个复数，实部称为电阻，虚部称为电抗，其中电容在电路中对交流电所起的阻碍作用称为容抗，电感在电路中对交流电所起的阻碍作用称为感抗，电容和电感在电路中对交流电引起的阻碍作用总称为电抗。阻抗的单位是欧姆。

R ，电阻：在同一电路中，通过某一导体的电流跟这段导体两端的电压成正比，跟这段导体的电阻成反比，这就是欧姆定律。

标准式： $I = \frac{U}{R}$ 。（理想的电阻就是实数，不涉及复数的概念）。

如果引入数学中复数的概念，就可以将电阻、电感、电容用相同的形式复阻抗来表示。既：电阻仍然是实数 R （复阻抗的实部），电容、电感用虚数表示，分别为：

$$Z = \frac{1}{j\omega C} \cdots \text{公式 (1)}$$

电容的阻抗表示方法

$$Z = j\omega L \cdots \text{公式 (2)}$$

电感的阻抗表示方法

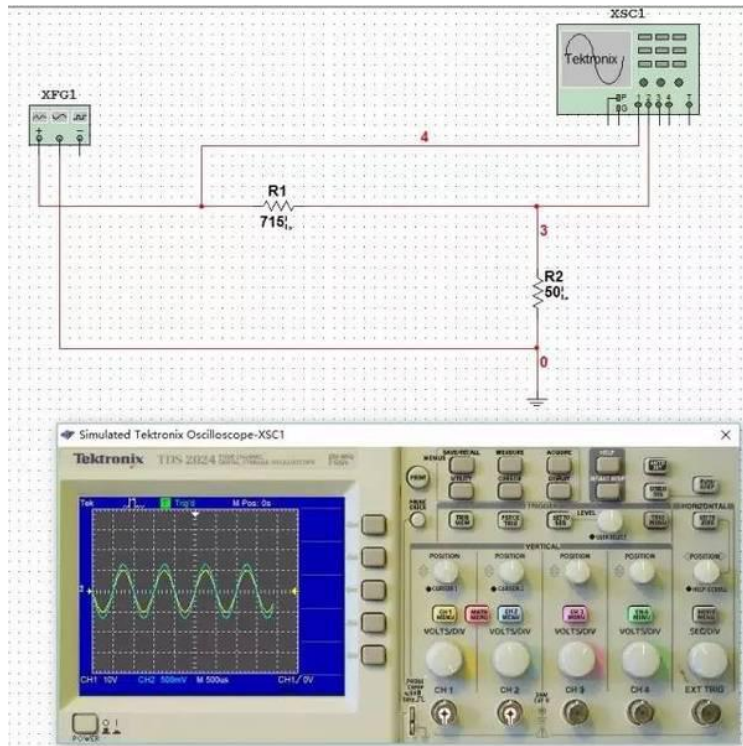
其中， $Z = R + i(\omega L - 1/(\omega C))$

说明：负载是电阻、电感的感抗、电容的容抗三种类型的复合物，复合后统称“阻抗”，写成数学公式即是：阻抗 $Z = R + i(\omega L - 1/(\omega C))$ 。其中 R 为电阻， ωL 为感抗， $1/(\omega C)$ 为容抗。

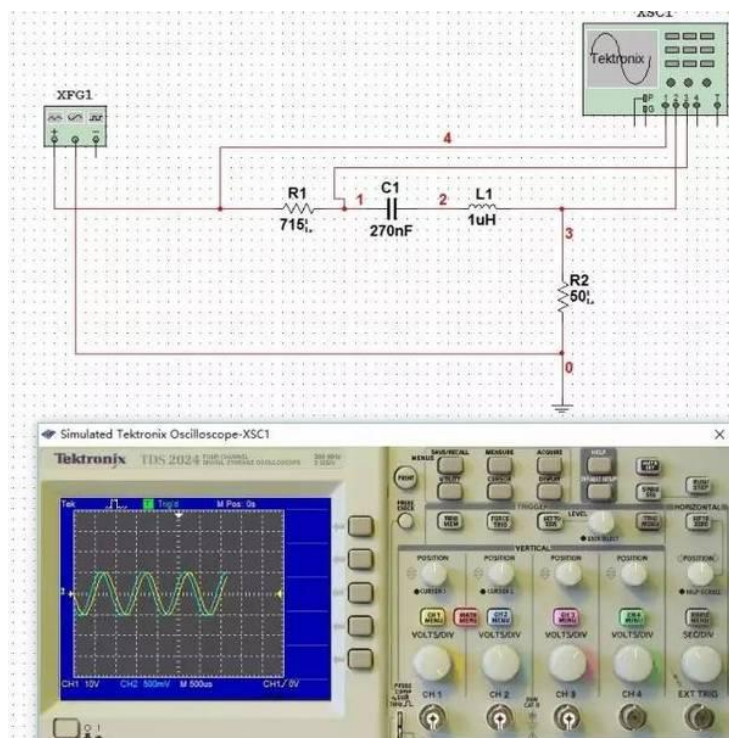
(1) 如果 $(\omega L - 1/(\omega C)) > 0$ ，称为“感性负载”；

(2) 反之，如果 $(\omega L - 1/(\omega C)) < 0$ 称为“容性负载”。

仔细看阻抗公式，它不再是一个实数。它因为电容、电感的存在，它变成了一个复数。



电路中如果只有电阻，只影响幅度变化。



通过上图，我们发现正弦波的幅度发生了变化，同时相位也发生了变化，同时频率特性也会变化。所以在计算的过程中，即需要考虑实部，也需要考虑虚部。

我们可以在一个复平面里面，以实部为 x 轴、以虚部为 y 轴，表示任意一个复数。我们的阻抗，不管多少电阻、电容、电感串联或并联，之后都可以表示在一个复平面里面。

在 RLC 串联电路中，交流电源电压 $U = 220\text{ V}$ ，频率 $f = 50\text{ Hz}$ ， $R = 30\ \Omega$ ， $L = 445\text{ mH}$ ， $C = 32\text{ mF}$ 。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & X_L = 2\pi fL \approx 140 \, \Omega, \quad X_C = \frac{1}{2\pi fC} \approx 100 \, \Omega, \\
 & \text{则: } |Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 50 \, \Omega \\
 & \text{则: } I = \frac{U}{|Z|} = 4.4 \, \text{A} \\
 (2) \quad & U_R = RI = 132 \, \text{V}, \quad U_L = X_L I = 616 \, \text{V}, \quad U_C = X_C I = 440 \, \text{V} \\
 (3) \quad & \varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = \arctan \frac{40}{30} = 53.1^\circ
 \end{aligned}$$

即总电压比电流超前 53.1° ，电路呈感性。



在上图中，我们看到通过几个矢量的叠加，最终阻抗在复平面中，落在了蓝色的圆点位置。

所以，任意一个阻抗的计算结果，我们都可以放在这个复平面的对应位置。各种阻抗的情况，组成了这个无穷大的平面。

2.2、反射公式

信号沿传输线向前传播时，每时每刻都会感受到一个瞬态阻抗，该阻抗可能是传输线本身的，也可能是中途或末端其他元件的。对信号来说，它不会区分到底是什么，信号所感受到的只有阻抗。如果信号感受到的阻抗是恒定的，那他就会正常向前传播，只要感受到的阻抗发生变化，不论是什么引起的（可能是中途遇到的电阻、电容、电感、过孔、PCB 转角或接插件），信号都会发生反射。

钱塘江大潮，就是河道的宽度变化引起了反射，这跟电路中阻抗不连续，导致信号反射，可以类比。反射聚集的能量叠加在一起，引起的过冲。也许这个比喻不恰当，但是挺形象。



那么有多少被反射回传输线的起点？衡量信号反射量的重要指标是反射系数，表示反射电压和原传输信号电压的比值。反射系数定义为：

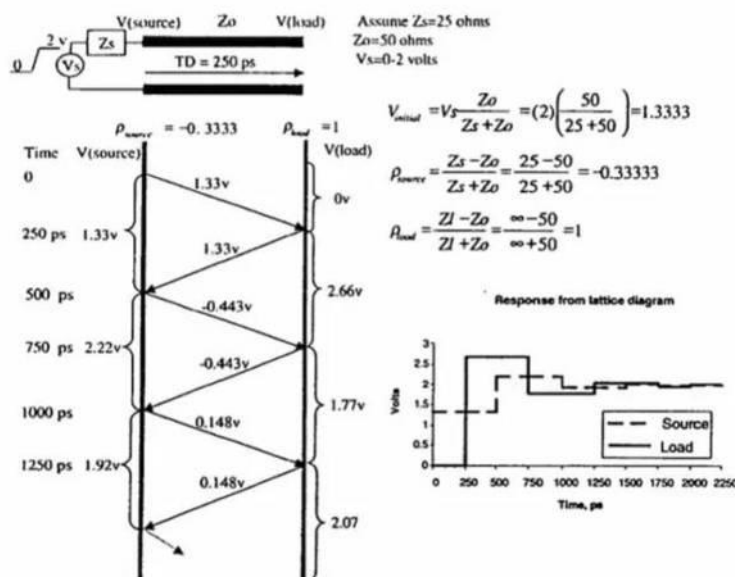
$$\Gamma = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_{IN} - Z_0}{Z_{IN} + Z_0}$$

其中：Z₀ 为变化前的阻抗，Z_{IN} 为变化后的阻抗。假设 PCB 线条的特性阻抗为 50 欧姆，传输过程中遇到一个 100 欧姆的贴片电阻，暂时不考虑寄生电容电感的影响，把电阻看成理想的纯电阻，那么反射系数为：

$$\Gamma = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3}$$

信号有 1/3 被反射回源端。

如果传输信号的电压是 3.3V 电压，反射电压就是 1.1V。纯电阻性负载的反射是研究反射现象的基础，阻性负载的变化无非是以下四种情况：阻抗增加有限值、阻抗减小有限值、开路（阻抗变为无穷大）、短路（阻抗突然变为 0）。



初始电压，是源电压 V_s (2V) 经过 Z_s (25 欧姆) 和传输线阻抗 (50 欧姆) 分压。 $V_{initial}=1.33V$

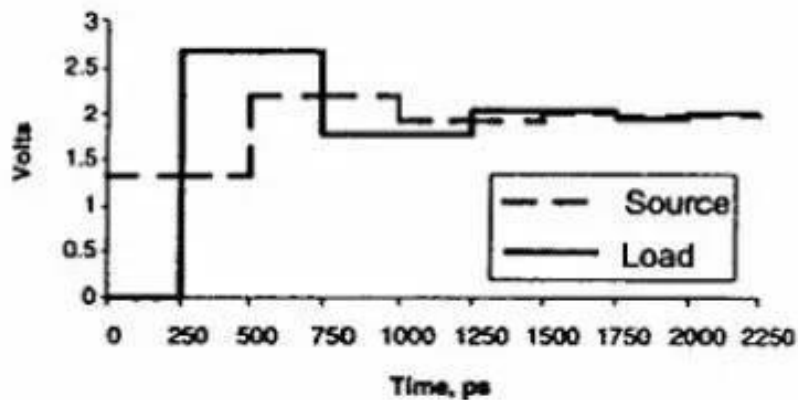
后续的反射率按照反射系数公式进行计算：

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\rho_L| e^{j\phi_L}$$

源端的反射率，是根据源端阻抗 (25 欧姆) 和传输线阻抗 (50 欧姆) 根据反射系数公式计算为 -0.33；

终端的反射率，是根据终端阻抗 (无穷大) 和传输线阻抗 (50 欧姆) 根据反射系数公式计算为 1；

我们按照每次反射的幅度和延时，在最初的脉冲波形上进行叠加就得到了这个波形，这也就是为什么，阻抗不匹配造成信号完整性不好的原因。



那么我们做一个重要的假设！

为了减少未知参数的数量，可以固化一个经常出现并且在应用中经常使用的参数。这里 Z_0 (特性阻抗) 通常为常数并且是实数，是常用的归一化标准值，如 50Ω、75Ω、100Ω 和 600Ω。

假设 Z_0 一定，为 50 欧姆。（为什么是 50 欧姆，此处暂时不表；当然也可以做其他假设，便于理解，我们先定死为 50Ω）。

那么，根据反射公式，我们得到一个重要的结论：

$$\Gamma = \frac{Z_{IN} - 50\Omega}{Z_{IN} + 50\Omega}$$

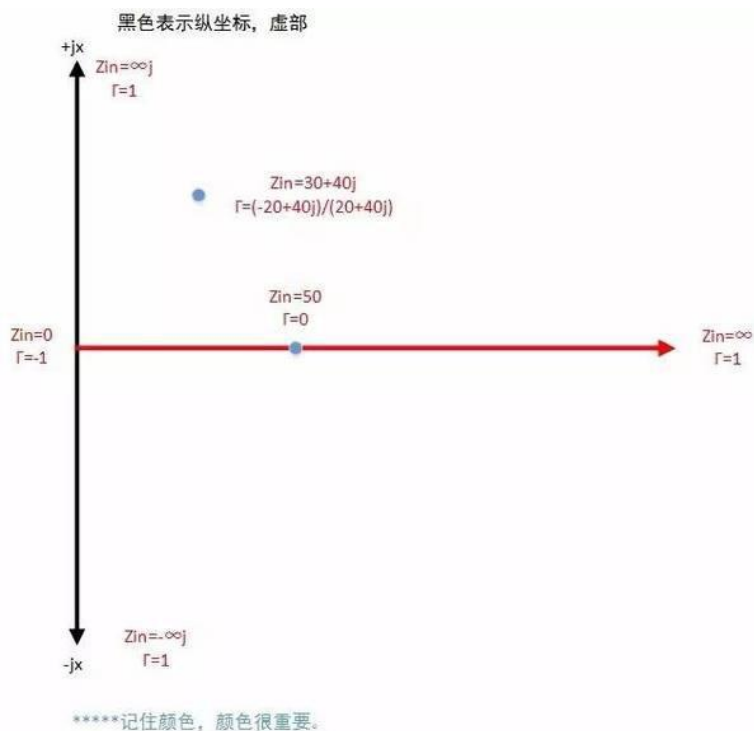
每一个 Z_{in} 对应唯一的 “ Γ ”，反射系数。

我们把对应关系描绘到刚刚我们说的“复平面”。于是我们可以定义归一化的负载阻抗：

$$z = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R + jX}{Z_0} = r + jx$$

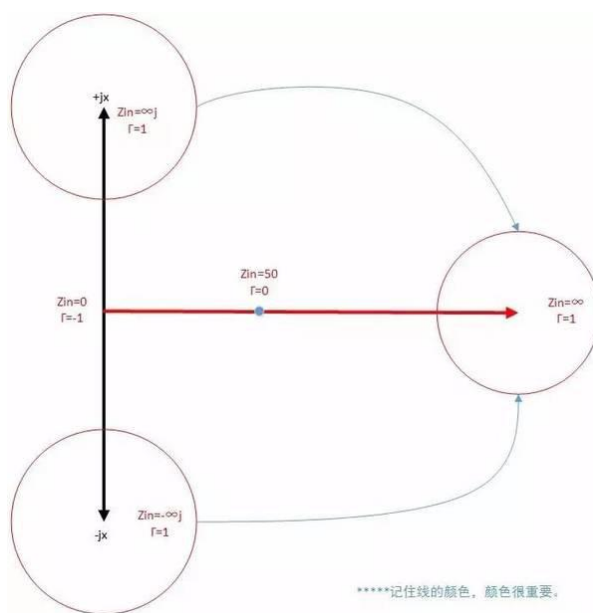
据此，将反射系数的公式重新写为：

$$\Gamma_L = \Gamma_r + j\Gamma_i = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{(Z_L - Z_0)/Z_0}{(Z_L + Z_0)/Z_0} = \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{r + jx - 1}{r + jx + 1}$$



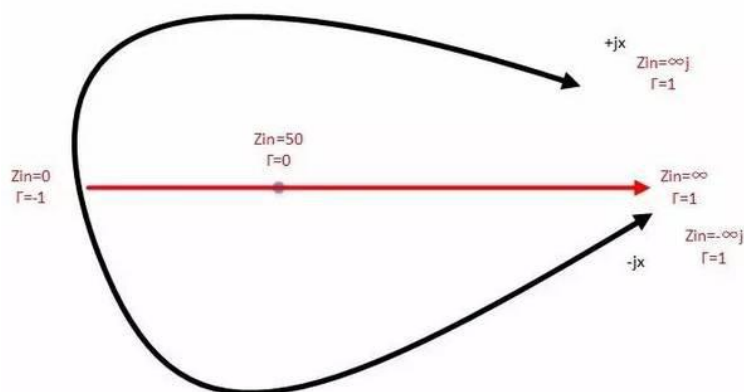
好了，我们在复平面里面，忘记 Z_{in} ，只记得 z （小写）和反射系数“ Γ ”。准备工作都做好了，下面我们准备“弯了”

2.3 掰弯

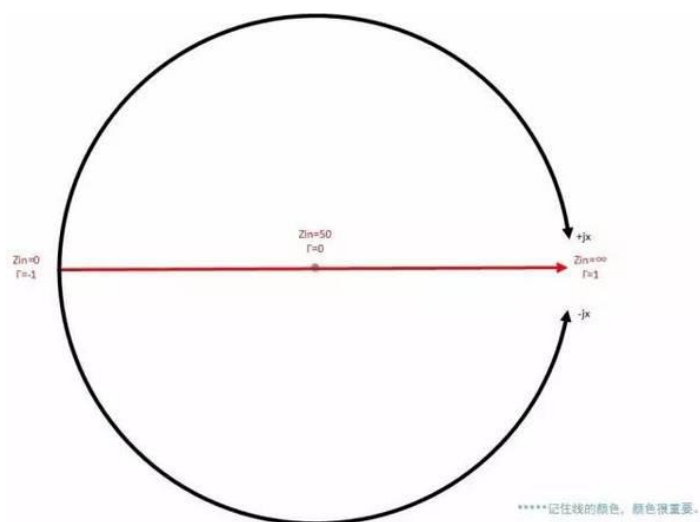


在复平面中，有三个点，反射系数都为 1，就是横坐标的无穷大，纵坐标的正负无穷大。历史上的某天，史密斯老先生，如有神助，把黑色线掰弯了，把上图中，三个红色圈标注的点，捏到一起。

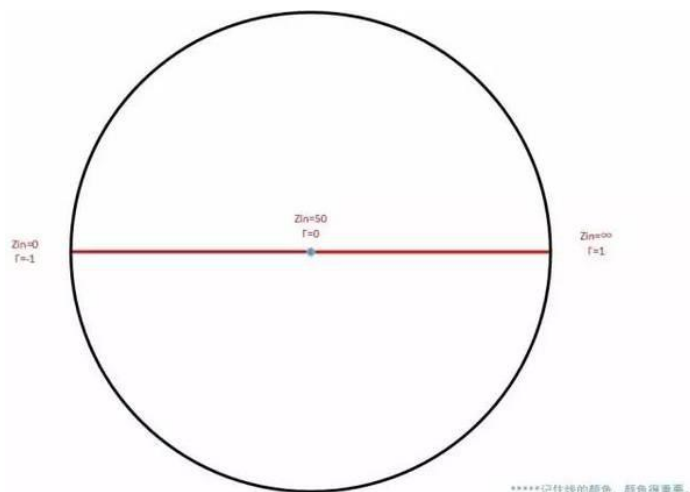
弯了，弯了



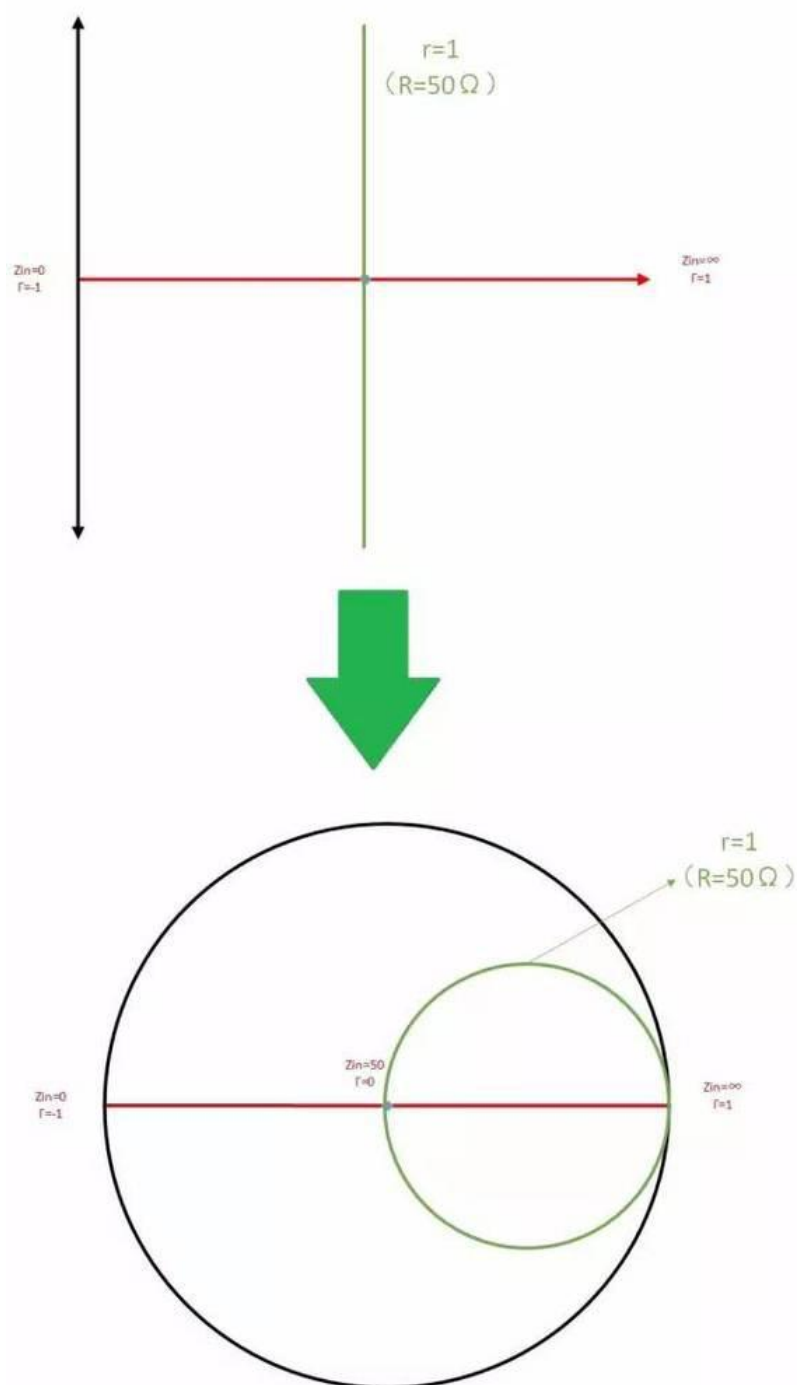
圆了，圆了。



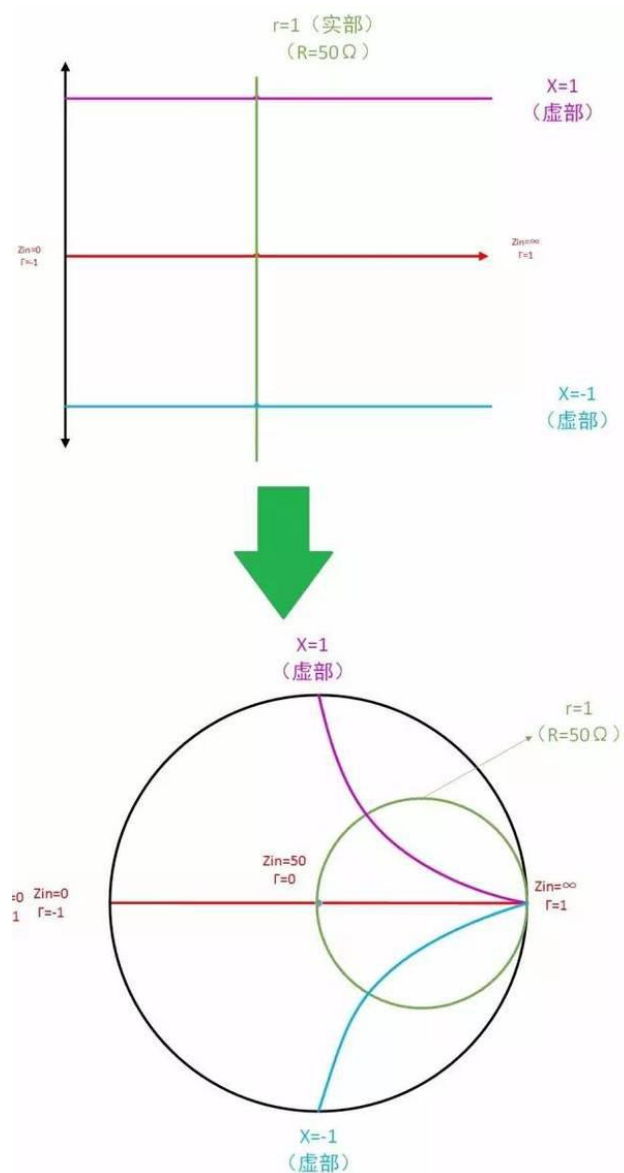
完美的圆：



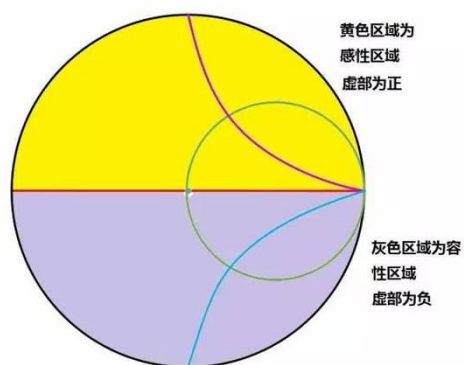
虽然，无穷大的平面变成了一个圆，但是，红线还是红线，黑线还是黑线。同时我们在原来的复平面中增加三根线，它们也随着平面闭合而弯曲。

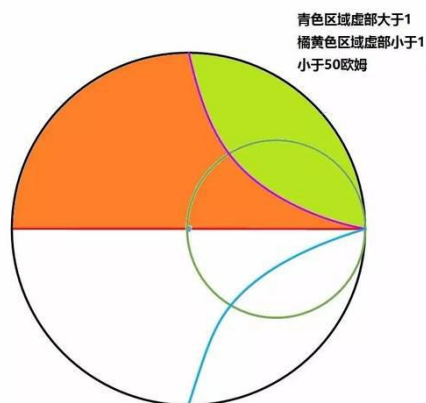
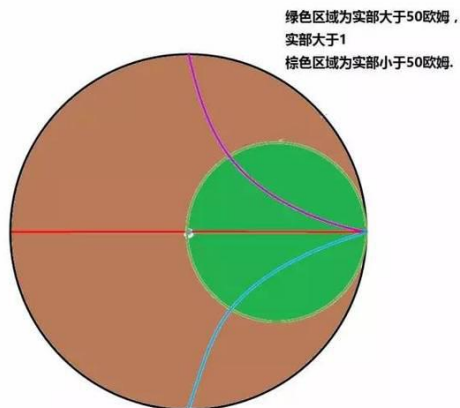


黑色的线上的阻抗，有个特点：实部为 0（电阻为 0）；
红色的线上的阻抗，有个特点：虚部为 0（电感、电容为 0）；
绿色的线上的阻抗，有个特点：实部为 1；（电阻为 50 欧姆）；
紫色的线上的阻抗，有个特点：虚部为 -1；
蓝色的线上的阻抗，有个特点：虚部为 1；

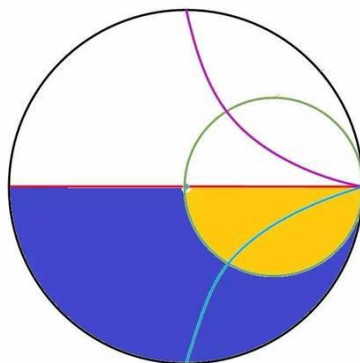


线上的阻抗特性，我们是从复平面，平移到史密斯原图的，所以特性跟着颜色走，特性不变。





下半圆与上班圆是一样的划分。

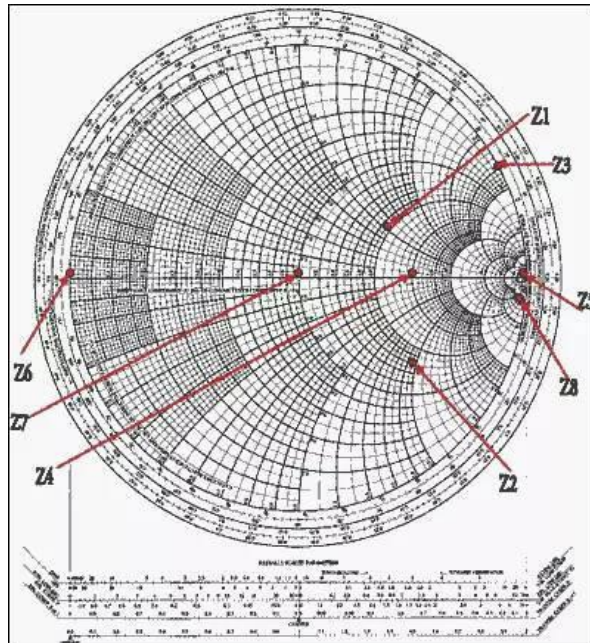


因为史密斯圆图是一种基于图形的解法，所得结果的精确度直接依赖于图形的精度。下面是一个用史密斯圆图表示的 RF 应用实例：已知特性阻抗为 50Ω ，负载阻抗如下：

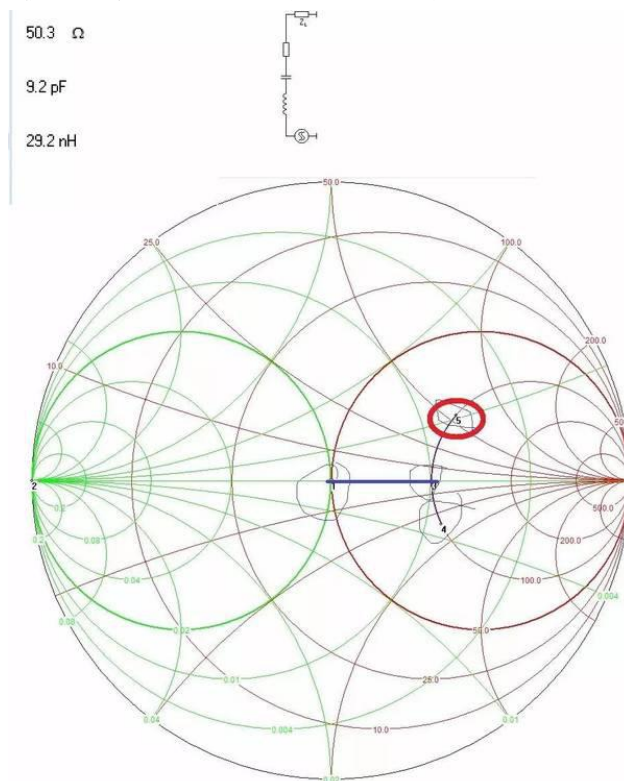
$Z1=100+j50\ \Omega$	$Z2=75-j100\ \Omega$	$Z3=j200\ \Omega$	$Z4=150\ \Omega$
$Z5=\infty$ (开路)	$Z6=0$ (短路)	$Z7=50\ \Omega$	$Z8=184-j900\ \Omega$

对上面的值进行归一化并标示在圆图中(见下图)：

$z_1=2+j$	$z_2=1.5-j2$	$z_3=j4$	$z_4=3$
$z_5=8$	$z_6=0$	$z_7=1$	$z_8=3.68-j18$



我们看不清上图。如果是“串联”，我们可以在清晰的史密斯原图上，先确定实部（红线上查找，原来复平面的横坐标），再根据虚部的正负，顺着圆弧滑动，找到我们对应的阻抗。（先忽略下图中的绿色线）



现在可以通过圆图直接解出反射系数 Γ 。

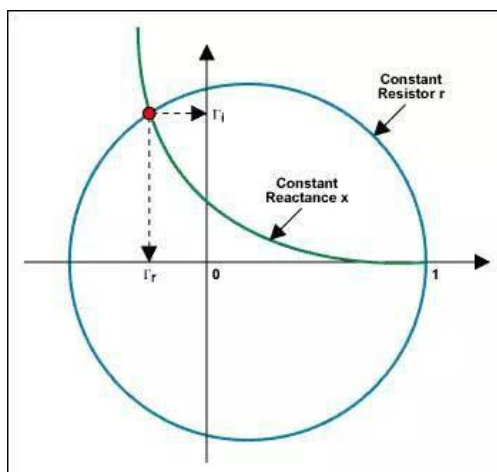
我们既可以通过**直角坐标**，去直接读取反射系数的值，也可以通过**极坐标**，读取反射系数的值。

1、直角坐标

画出阻抗点(等阻抗圆和等电抗圆的交点)，只要读出它们在直角坐标水平轴和垂直轴上的投影，就得到了反射系数的实部 Γ_r 和虚部 Γ_i (见下图)。

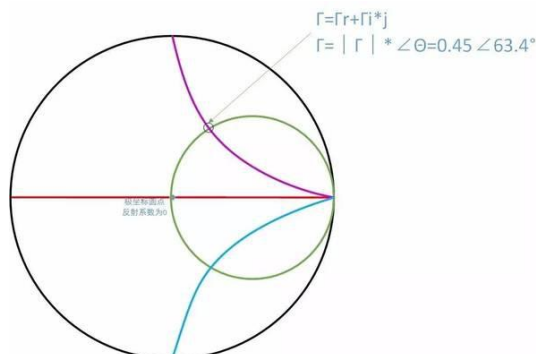
该范例中可能存在八种情况，在下图所示史密斯圆图上可以直接得到对应的反射系数 Γ ：

$\Gamma_1 = 0.4 + 0.2j$	$\Gamma_2 = 0.51 - 0.4j$	$\Gamma_3 = 0.875 + 0.48j$	$\Gamma_4 = 0.5$
$\Gamma_5 = 1$	$\Gamma_6 = -1$	$\Gamma_7 = 0$	$\Gamma_8 = 0.96 - 0.1j$



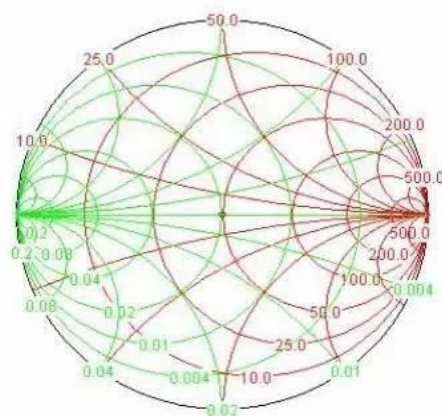
从 x-y 轴直接读出反射系数 Γ 的实部和虚部

2、极坐标



极坐标表示，有什么用？非常有用，这其实也是史密斯原图的目的。

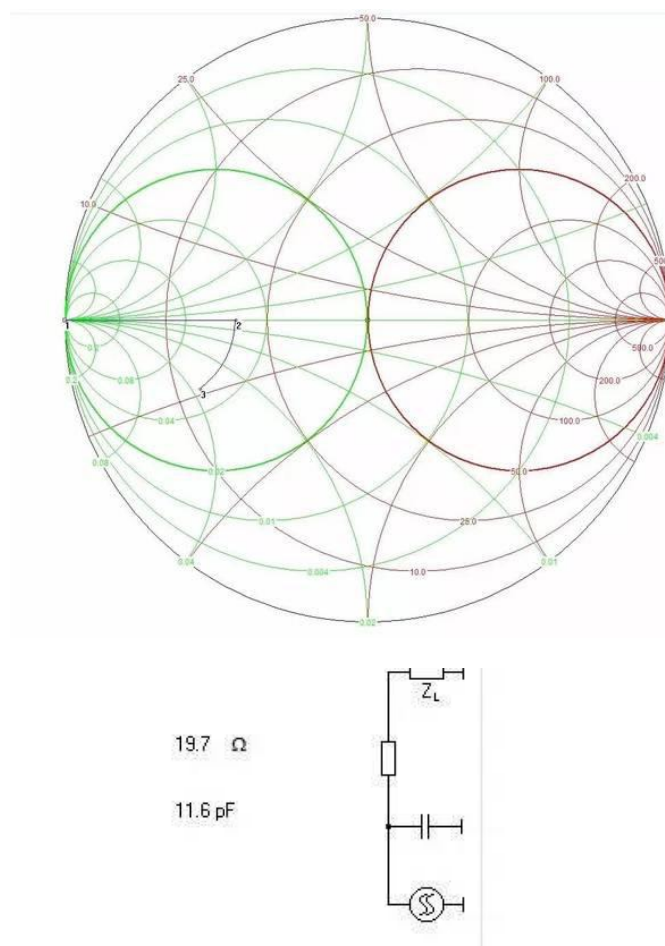
3、红色阵营 vs 绿色阵营



刚刚我们已经注意到，史密斯原图，除了有红色的曲线，是从阻抗复平面掰弯，过来的红色世界。同时，在图中，还有绿色的曲线，他们是从导纳复平面，掰弯产生的。过程跟刚刚的过程是一样的。

那么这个导纳的绿色，有什么用呢？

并联电路，用导纳计算，我们会很便利。同时在史密斯原图中，我们用导纳的绿色曲线进行查询，也会很方便。



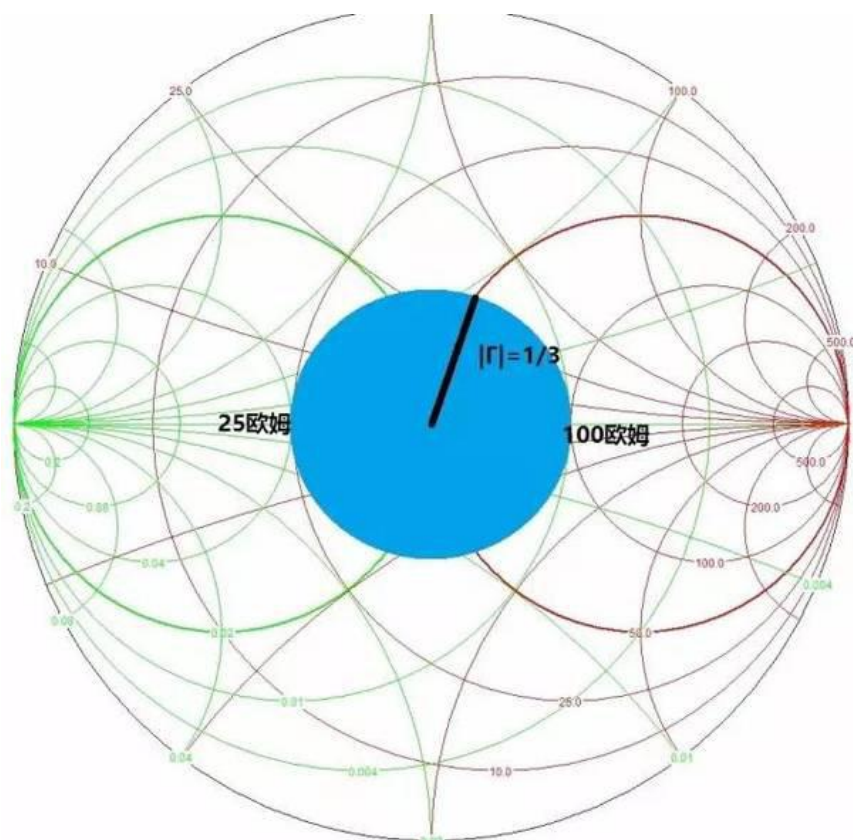
如图，这样并联一个电容，通过绿色的曲线很快就可以查询到对应的归一化阻抗和反射系数。

三、史密斯圆图干什么？

解释和介绍了史密斯圆图这么长的段落，别忘了，我们想干什么。我们实际是希望，我们设计的电路反射系数越接近 0 越好。

但是，什么样的电路是合格的电路呢？反射系数不可能理想的为 0，那么我们对反射系数，有什么样的要求呢？

我们希望反射系数的绝对值小于 $1/3$ ，即反射系数落入史密斯圆图的蓝色区域中（如下图）。



这个蓝色的球，有什么特色呢？其实我们通过史密斯原图的数值已经清楚的发现。在中轴线，也就是之前说的红线上，分别是 25 欧姆，和 100 欧姆两个位置。即： Z_{in} 在 $1/2 Z_0$ 和 2 倍 Z_0 之间的区域。

也就是，我们打靶打在蓝色区域，即认为反射系数是可以接受的。

---关于本文讨论与北京海洋兴业科技股份有限公司联系：hyxyyq@oitek.com.cn



® 北京海洋兴业科技股份有限公司 (证券代码: 839145)

北京市西三旗东黄平路19号龙旗广场4号楼(E座)906室

电话: 010-62176775 62178811 62176785

企业QQ: 800057747 维修QQ: 508005118

企业官网: www.hyxyyq.com

邮编: 100096

传真: 010-62176619

邮箱: market@oitek.com.cn

购线网: www.gooxian.com



扫描二维码关注我们

查找微信公众号: 海洋仪器